Ministerul Educației și Cercetării

art Klett

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică
Ioan Balica

Mathematik

7. Klasse

7

Inhalt

Einheit	Seite Nr.	Lektionen
EINHEIT 1 Die Menge der reellen Zahlen 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1	**10**	L1: Die Quadratwurzel einer Quadratzahl. Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl
	16	L2: Die Menge der reellen Zahlen
	24	L3: Rechenregeln für Quadratwurzeln
	30	L4: Addition und Subtraktion der reellen Zahlen
	35	L5: Multiplikation und Division der reellen Zahlen
	40	L6: Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten. Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen
	45	L7: Rationalisieren des Nenners eines Bruchs
	49	L8: Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen. Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen
	53	L9: Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$
	55	Wiederholung und Bewertung
EINHEIT 2 Gleichungen und Gleichungssysteme 1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2	**58**	L1: Umformen einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Identitäten
	62	L2: Gleichungen der Form $ax + b = 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge einer Gleichung. Äquivalente Gleichungen
	68	L3: Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten
	74	L4: Lösen von Aufgaben mithilfe von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen
	79	Wiederholung und Bewertung
EINHEIT 3 Elemente der Datenverarbeitung 1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3	**82**	L1: Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen. Orthogonales Achsensystem in der Ebene. Darstellung von Paaren reeller Zahlen in einem orthogonalen Achsensystem. Darstellung von Punkten in einem orthogonalen Achsensystem. Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene
	88	L2: Darstellung und Interpretation von funktionalen Abhängigkeiten durch Tabellen, Diagramme und Grafiken. Häufigkeitspolygon
	95	Wiederholung und Bewertung
EINHEIT 4 Das Viereck 1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4	**98**	L1: Konvexes Viereck. Die Winkelsumme im konvexen Viereck
	102	L2: Das Parallelogramm. Eigenschaften
	107	L3: Anwendungen des Parallelogramms in der Dreiecksgeometrie. Mittellinie in einem Dreieck, Schwerpunkt eines Dreiecks
	111	L4: Das Rechteck. Eigenschaften
	115	L5: Der Rhombus. Eigenschaften
	120	L6: Das Quadrat. Eigenschaften
	125	L7: Das Trapez: Einteilung, Eigenschaften. Die Mittellinie im Trapez
	131	L8: Umfänge und Flächeninhalte
	138	Wiederholung und Bewertung
EINHEIT 5 Der Kreis 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5	**142**	L1: Der Kreis. Sehnen und Bogen in einem Kreis. Eigenschaften
	147	L2: Umfangswinkel
	151	L3: Tangenten eines Kreises
	155	L4: Regelmäßige Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben sind
	158	L5: Länge des Kreises und Flächeninhalt des Diskus
	162	Wiederholung und Bewertung
EINHEIT 6 Ähnlichkeit der Dreiecke 1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6	**166**	L1: Proportionale Strecken. Lehrsatz der äquidistanten (abstandsgleichen) Parallelen
	170	L2: Lehrsatz des Thales
	175	L3: Ähnliche Dreiecke. Hauptsatz der Ähnlichkeit
	179	L4: Ähnlichkeitskriterien der Dreiecke. Schätzen von Entfernungen im Alltag mithilfe der Ähnlichkeit
	184	Wiederholung und Bewertung
EINHEIT 7 Metrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck 1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7, 6.7	**188**	L1: Orthogonale Projektionen auf einer Geraden. Der Höhensatz
	192	L2: Der Kathetensatz
	195	L3: Der Lehrsatz des Pythagoras
	201	L4: Elemente der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck
	208	L5: Lösen des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung von Elementen in regelmäßigen Vielecken. Schätzen der Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe der metrischen Beziehungen
	214	Wiederholung und Bewertung
Lösungen	**216**	

Allgemeine und spezifische Kompetenzen

Allgemeine Kompetenzen

1. Mathematische Daten, Größen und Beziehungen in ihrem Kontext erkennen
2. Verarbeiten von quantitativen, qualitativen und strukturellen mathematischen Daten aus verschiedenen Informationsquellen
3. Anwendung spezifischer Konzepte und Algorithmen in verschiedenen mathematischen Kontexten
4. Ausdrücken von Informationen, Schlussfolgerungen und Lösungen für eine bestimmte Situation in mathematischer Sprache
5. Analysieren der mathematischen Eigenschaften einer bestimmten Situation
6. Mathematisches Modellieren einer gegebenen Situation durch Integration von Lerninhalten aus verschiedenen Bereichen

Spezifische Kompetenzen

1.1 Identifizieren von Zahlen, die zu verschiedenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ gehören
1.2 Identifizieren einer gegebenen Situation, die durch lineare Gleichungen oder Gleichungssysteme gelöst werden kann
1.3 Identifizieren von Informationen aus Tabellen, Grafiken und Diagrammen
1.4 Identifizieren bestimmter Vierecke in gegebenen geometrischen Konfiguration
1.5 Identifizieren der Elemente des Kreises und/oder regelmäßiger Vielecke in gegebenen geometrischen Konfigurationen
1.6 Identifizieren der ähnlichen Dreiecke in gegebenen geometrischen Konfigurationen
1.7 Erkennen der Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks in einer gegebenen geometrischen Konfiguration
2.1 Anwenden von Rechenregeln zum Schätzen und Approximieren von reellen Zahlen
2.2 Anwenden der Rechenregeln mit reellen Zahlen zur Überprüfung der Lösungen von linearen Gleichungen oder Gleichungssystemen
2.3 Verarbeiten von Daten in Form von Tabellen, Diagrammen oder Schaubildern, um sie zu erfassen, darzustellen und zu präsentieren
2.4 Beschreiben von Vierecken anhand ihrer Definitionen und Eigenschaften in gegebenen geometrischen Konfigurationen
2.5 Beschreiben der Eigenschaften eines Kreises und von regelmäßigen Vielecken, die einem Kreis einbeschrieben sind
2.6 Feststellen der Ähnlichkeit von Dreiecken
2.7 Anwenden der metrischen Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck zur Bestimmung seiner Elemente
3.1 Verwenden der Algorithmen und Eigenschaften der Rechenoperationen in der Menge der reellen Zahlen
3.2 Verwenden der Äquivalenzumformungen zur Lösung linearer Gleichungen und Gleichungssysteme
3.3 Auswahl der geeigneten Methode zur Darstellung von Aufgaben mit funktionalen Abhängigkeiten und deren Darstellungen
3.4 Verwenden der Eigenschaften der Vierecke zur Lösung von Aufgaben
3.5 Verwenden der Kreiseigenschaften beim Lösen von Aufgaben
3.6 Verwenden der Ähnlichkeit von Dreiecken in gegebenen geometrischen Konfigurationen, um Längen, Maße und Flächeninhalte zu bestimmen
3.7 Ableiten der metrischen Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck
4.1 Verwenden der Terminologie der reellen Zahlen (Vorzeichen, Absolutbetrag, entgegengesetzte Zahl, Kehrwert)
4.2 Aufstellen der Gleichungen und lineare Gleichungssysteme
4.3 Beschreiben der Elemente der Datenverarbeitung in mathematischer Sprache
4.4 Ausdrücken der Begriffe bezüglich der Vierecke in geometrischer Sprache
4.5 Eigenschaften von Kreisen und Vielecken in mathematischer Sprache ausdrücken
4.6 Eigenschaften geometrischer Figuren in mathematischer Sprache mithilfe der Ähnlichkeit ausdrücken
4.7 Die Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks in mathematischer Sprache ausdrücken
5.1 Entwickeln der Strategien zur Lösung von Aufgaben mit reellen Zahlen
5.2 Erarbeiten von Methoden zur Lösung von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen
5.3 Analyse der Praxissituationen mithilfe der Elemente der Datenverarbeitung
5.4 Auswahl geeigneter geometrischer Darstellungen, um die Berechnung von Streckenlängen, Winkelmaßen und Flächeninhalten zu optimieren
5.5 Interpretieren der Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke anhand geometrischer Darstellungen
5.6 Interpretieren der Ähnlichkeit von Dreiecken in geometrischen Konfigurationen
5.7 Interpretieren der metrischen Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks
6.1 Mathematische Modellierung von praktischen Situationen bei den Operationen mit reellen Zahlen
6.2 Mathematische Umsetzung von gegebenen Situationen mithilfe von Gleichungen und/oder linearen Gleichungssystemen
6.3 Umsetzen einer gegebenen Situation in eine geeignete Darstellung (Text, Formel, Diagramm, Grafik)
6.4 Modellierung gegebener Situationen durch geometrische Darstellungen mit Vierecken
6.5 Mathematische Modellierung praktischer Situationen mit regelmäßigen Vielecken oder Kreisen
6.6 Anwenden einer Strategie zur Lösung von gegebenen Situationen unter Verwendung der Ähnlichkeit von Dreiecken
6.7 Anwenden einer Strategie zur Lösung gegebener Situationen unter Verwendung metrischer Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck

E1 Die Menge der reellen Zahlen

1. Lektion Die Quadratwurzel einer Quadratzahl.
Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

2. Lektion Die Menge der reellen Zahlen

3. Lektion Rechenregeln für Quadratwurzeln

4. Lektion Addition und Subtraktion der reellen Zahlen

5. Lektion Multiplikation und Division der reellen Zahlen

6. Lektion Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten.
Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen

7. Lektion Rationalisieren des Nenners eines Bruchs

8. Lektion Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen.
Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen

9. Lektion Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$

Wiederholung und Bewertung

Die meisten Zahlen, die wir täglich verwenden, sind reelle Zahlen. Dazu gehören der Geldbetrag in unserem Portemonnaie, die Statistiken, die wir in Sportsendungen sehen, die Mengenangaben in Kochbüchern. Wir verwenden reelle Zahlen, um Windgeschwindigkeiten, Niederschlagsmengen, Entfernungen, aber auch die Menge des Benzins im Tank oder unsere Herzfrequenz anzugeben.

1. Lektion: Die Quadratwurzel einer Quadratzahl. Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

Schlüsselwörter

Quadratzahl — Quadratwurzel — Wurzel

Die Quadratwurzel einer Quadratzahl

Mathe im Alltag

Das Grundstück in der Abbildung ist quadratisch und hat einen Flächeninhalt von 6 400 m^2.

Wie lang ist die Seite des Grundstücks?

Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich dem Quadrat seiner Seitenlänge.

Wenn l die Seitenlänge des Grundstücks in Metern ist, beträgt der Flächeninhalt des Grundstücks l^2 Quadratmeter.

Also: $l^2 = 6\,400$. Da $80^2 = 6\,400$, erhalten wir $l = 80$ m.

Was stellen wir fest?

In einigen praktischen Situationen ist es notwendig, eine natürliche Zahl n zu bestimmen, wenn man das Quadrat von n kennt. Dieser Vorgang wird *Quadratwurzelziehen* von n^2 bezeichnet.

Eine natürliche Zahl, die das Quadrat (die zweite Potenz) einer anderen natürlichen Zahl ist, nennt man Quadratzahl.

Merke dir!

Sei a eine Quadratzahl. Wir nennen *Quadratwurzel der Zahl* die natürliche Zahl n, sodass $n^2 = a$ ist.

Die Zahl n wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet und als *Quadratwurzel* oder *Wurzel aus a* gelesen. Man kann also schreiben:

$$\sqrt{a} = n, \text{ wenn und nur wenn } n^2 = a.$$

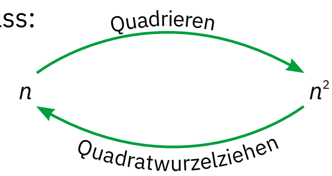
Beispiele

1. $\sqrt{0} = 0$, weil $0^2 = 0$;
2. $\sqrt{25} = 5$, weil $5^2 = 25$;
3. $\sqrt{121} = 11$, weil $11^2 = 121$;
4. $\sqrt{729} = 27$, weil $27^2 = 729$;
5. $\sqrt{1024} = 32$, weil $32^2 = 1\,024$;
6. $\sqrt{7225} = 85$, weil $85^2 = 7\,225$.

Bemerkung

Die Verbindung zwischen Quadrieren (zur zweiten Potenz erheben) und Quadratwurzelziehen

Aus der Definition der Quadratwurzel einer Quadratzahl ergibt sich unmittelbar, dass:



1. $\sqrt{n^2} = n$ für jede natürliche Zahl n;
2. $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede Quadratzahl a.

Mit anderen Worten, Quadrieren und Quadratwurzelziehen sind umgekehrte Operationen.

Beispiele

1. $\sqrt{7^2} = 7$, weil $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$;
2. $(\sqrt{16})^2 = 16$, weil $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$;
3. $\sqrt{5^2} = 5$, weil $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$;
4. $(\sqrt{81})^2 = 81$, weil $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81$.

Die Quadratwurzel des Quadrats einer positiven rationalen Zahl

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass, wenn eine natürliche Zahl a als Quadrat einer anderen natürlichen Zahl n geschrieben werden kann, dann wird a Quadratzahl und n Quadratwurzel (oder Wurzel) von a genannt.

Wir erweitern diese Definition auf Quadrate positiver rationaler Zahlen.

Gruppenarbeit

1. Schreibt ab und ergänzt in Zweiergruppen die Tabelle:

x	0,7	1,2	1,3	1,4	1,5	4,5	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{101}$
x^2	0,49					20,25		$\frac{49}{25}$		

2. Übertragt folgende Tabelle in eure Hefte, überprüft die Richtigkeit der Angaben und bestimmt durch Versuche die Werte der positiven rationalen Zahlen x, die in die zweite Zeile der Tabelle zu schreiben sind, sodass x^2 und x in der angegebenen Beziehung stehen:

x^2	0,01	1,69	1,96	2,25	8,41	30,25	$\frac{4}{9}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{169}{81}$	$\frac{256}{625}$
x	0,1				2,9		$\frac{2}{3}$			

3. Vergleicht die Ergebnisse der ersten und zweiten Tabelle mit den anderen Arbeitsgruppen und analysiert die Zusammenhänge zwischen den Daten in den beiden Tabellen.

Merke dir!

Sei a eine positive rationale Zahl, die als Quadrat einer rationalen Zahl geschrieben werden kann.
Die positive rationale Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = a$ wird als *Quadratwurzel* der rationalen Zahl a bezeichnet.
Wie zuvor wird x mit $\sqrt{a}$ bezeichnet und *Quadratwurzel der Zahl a* gelesen. Wenn also die rationale Zahl $a > 0$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist, kann sie geschrieben werden:

$$\sqrt{a} = x, \text{ wenn und nur wenn } x^2 = a \text{ und } x > 0.$$

Da $\sqrt{0} = 0$ ist, wird die obige Beziehung allgemeiner für $a \geq 0$ wie folgt geschrieben:

$$\sqrt{a} = x, \text{ wenn und nur wenn } x^2 = a \text{ und } x \geq 0.$$

Beispiele

1. $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, weil $(0{,}2)^2 = 0{,}04$;

2. $\sqrt{11{,}56} = 3{,}4$, weil $3{,}4^2 = 11{,}56$;

3. $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$, weil $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$;

4. $\sqrt{\frac{121}{729}} = \frac{11}{27}$, weil $\left(\frac{11}{27}\right)^2 = \frac{121}{729}$.

Bemerkungen

1. Wenn die rationale Zahl $a > 0$ das Quadrat einer rationalen Zahl x ist, dann ist $a = x^2 = (-x)^2$.

Beispiele: **a.** $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$; **b.** $5{,}76 = (2{,}4)^2 = (-2{,}4)^2$.

Die obige Definition zeigt, dass die Quadratwurzel der Zahl a eine positive Zahl ist. Deshalb:

a. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt{\frac{1}{4}} \neq -\frac{1}{2}$; **b.** $\sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ und $\sqrt{5{,}76} \neq -2{,}4$.

2. Der Zusammenhang zwischen der Quadrierungsoperation und dem Ziehen der Quadratwurzel gilt für rationale Zahlen, sofern die obige Positivitätsbedingung erfüllt ist. Da der Absolutbetrag einer rationalen Zahl nicht negativ ist und $|-x| = |x|$, folgt aus der Definition der Quadratwurzel für jede rationale Zahl x, dass:

a. $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede rationale Zahl $a \geq 0$, die das Quadrat einer rationalen Zahl ist;

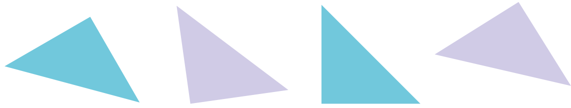
b. $\sqrt{x^2} = |x|$ für jede rationale Zahl x.

1.1

Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

Mathe im Alltag

Vier identische Sperrholzstücke in Form rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke mit einer Kathetenlänge von 1 dm werden benötigt, um ein Modellflugzeug wie in der nebenstehenden Abbildung zu bauen.



Es gibt zwei Möglichkeiten, die Bestandteile zu erhalten:

1. Wir zeichnen ein Rechteck mit den Dimensionen 1 dm und 2 dm auf die Sperrholzplatte, teilen es in zwei Quadrate der Seitenlänge von je 1 dm und machen dann zwei Schnitte entlang der Diagonalen dieser Quadrate wie in Abbildung 1, um die vier Teile zu erhalten.

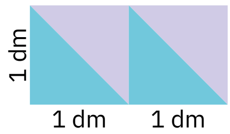


Abbildung 1

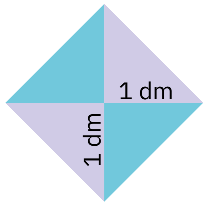


Abbildung 2

2. Wir beachten, dass die Teile so angeordnet werden können, dass sie ein Quadrat bilden (Abbildung 2). Wir machen uns daran, die Seitenlänge dieses Quadrats zu bestimmen, damit wir beim Ausschneiden aus einem anderen Stück Sperrholz kein Material verschwenden.

Da die Quadrate in den Abbildungen 1 und 2 den gleichen Flächeninhalt von 2 dm^2 haben, ist die Seitenlänge des Quadrats die positive Zahl x mit der Eigenschaft, dass $x^2 = 2$ ist. Da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, suchen wir eine Annäherung an diese Zahl.

Da $1^2 < 2 < 2^2$ ist, folgt daraus, dass x zwischen 1 und 2 liegen muss.

Da $1{,}4^2 = 1{,}96$ und $1{,}5^2 = 2{,}25$, bedeutet dies, dass $1{,}4 < x < 1{,}5$. Genauer gesagt, $1{,}41 < x < 1{,}42$, weil $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$ und $1{,}42^2 = 2{,}0164 < 2$.

Was stellen wir fest?

Die oben beschriebene praktische Situation zeigt, dass es eine positive Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ gibt, deren Wert, auch wenn er nicht genau angegeben werden kann, auf eine ganze Zahl oder auf einen Dezimalbruch mit einer, zwei oder mehreren Dezimalstellen angenähert werden kann.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass es für jede positive rationale Zahl a eine positive Zahl x gibt, deren Quadrat a ist.

Somit erstreckt sich der Begriff der Quadratwurzel auf alle positiven rationalen Zahlen.

Merke dir!

Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl a ist eine positive Zahl x, die die Eigenschaft $x^2 = a$ hat.

Wie zuvor bezeichnen wir $x = \sqrt{a}$ und sagen, dass x die *Quadratwurzel* der Zahl a (oder *Wurzel aus a*) ist. Die Beziehungen gelten auch hier:

a. $\sqrt{a} = x$, wenn und nur wenn $x^2 = a$;

b. $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede rationale Zahl $a \geq 0$;

c. $\sqrt{a^2} = |a|$ für jede rationale Zahl a.

Beispiele

In der vorigen praktischen Aufgabe bestätigt die Länge x der Seite des Quadrats die Beziehung $x^2 = 2$, also ist, laut Definition, $x = \sqrt{2}$.

Auch andere praktische Aufgaben führen zu der Schlussfolgerung, dass es positive Zahlen der Form $\sqrt{3}$, $\sqrt{3{,}14}$ oder $\sqrt{\frac{5}{12}}$ gibt.

Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

Eine Menge *zu schätzen*, bedeutet, einen ungefähren Wert anzugeben, ohne alle erforderlichen Daten zu kennen, um eine genaue Antwort zu formulieren. Um eine Zahl der Form $\sqrt{a}$ in der Praxis verwenden zu können, wobei a eine positive rationale Zahl ist, werden wir Annäherungen an ganze Zahlen oder an endliche Dezimalbrüche verwenden, indem wir die rationale Zahl a zwischen den Quadraten zweier rationaler Zahlen einschließen.

Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl durch Einschließen der Zahl zwischen Quadrate rationaler Zahlen

Nehmen wir zum Beispiel die rationale Zahl 5,61. Wir schließen diese Zahl zwischen zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen ein: $2^2 < 5{,}61 < 3^2$, woraus folgt, dass $2 < \sqrt{5{,}61} < 3$.

Daher ist die Abrundung von $\sqrt{5{,}61}$ an die Ordnung der Einer gleich 2, und die Aufrundung 3.

Zur Bestimmung von Näherungswerten von $\sqrt{5{,}61}$ an die Ordnung der Zehntel und der Hundertstel gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1: Wir berechnen die Quadrate der Zahlen der Form $\overline{2{,}a}$, wobei $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Wir erhalten $2{,}3^2 < 5{,}61 < 2{,}4^2$, also $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}3\ldots$.

Schritt 2: Wir berechnen die Quadrate der Zahlen der Form $\overline{2{,}3a}$, wobei $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.
Wir erhalten $2{,}36^2 < 5{,}61 < 2{,}37^2$, woraus sich ergibt, dass $\sqrt{5{,}61} \simeq 2{,}36\ldots$.

Wenn man so weitermacht, kann man Näherungswerte für eine beliebige Anzahl von Dezimalstellen erhalten.

Schätzen der Quadratwurzel mithilfe eines Taschenrechners

Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl wird mithilfe des Taschenrechners (oder der Handy- oder Tablet-Apps) ermittelt, indem die Zahl in Dezimalform in den Rechner eingegeben und dann die Taste mit dem *Wurzelzeichen* gedrückt wird.

Zum Beispiel wird der ungefähre Wert von $\sqrt{2}$ ermittelt, indem die Tasten der Reihe nach gedrückt werden:

$$\boxed{2} \longrightarrow \boxed{\sqrt{\ }} \longrightarrow \boxed{1{,}4142135}$$

Wenn die rationale Zahl als gemeiner Bruch angegeben ist, verwenden wir die Divisionstaste, um die Zahl in die Dezimalform zu bringen, und drücken dann die Wurzeltaste.

Portfolio

Untersucht das digitale Lehrbuch (in rumänischer Sprache), um Folgendes zu studieren:

- die babylonische Methode zur Bestimmung des ungefähren Werts der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl;
- den Algorithmus zum Ziehen der Quadratwurzel aus einer positiven rationalen Zahl, die durch einen endlichen Dezimalbruch ausgedrückt wird. Berechnet mithilfe des Algorithmus zum Quadratwurzelziehen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, auf zwei Dezimalstellen genau.

Bemerkung

Tabelle der Quadratwurzelwerte der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 25				
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{6} = 2{,}4494\ldots$	$\sqrt{11} = 3{,}3166\ldots$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{21} = 4{,}5825\ldots$
$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$	$\sqrt{7} = 2{,}6457\ldots$	$\sqrt{12} = 3{,}4641\ldots$	$\sqrt{17} = 4{,}1231\ldots$	$\sqrt{22} = 4{,}6904\ldots$
$\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$	$\sqrt{8} = 2{,}8284\ldots$	$\sqrt{13} = 3{,}6055\ldots$	$\sqrt{18} = 4{,}2426\ldots$	$\sqrt{23} = 4{,}7958\ldots$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{14} = 3{,}7416\ldots$	$\sqrt{19} = 4{,}3588\ldots$	$\sqrt{24} = 4{,}8989\ldots$
$\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$	$\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$	$\sqrt{15} = 3{,}8729\ldots$	$\sqrt{20} = 4{,}4721\ldots$	$\sqrt{25} = 5$

1.1

Untersuchung

An der Tafel stehen die Zahlen $a=7{,}84$ und $b=1{,}44$. Löst die Aufgaben und überprüft die Richtigkeit eurer Antworten, indem ihr sie mit euren Mitschülern und anschließend mit eurem Lehrer besprecht. Schreibt die richtigen Schlussfolgerungen in euer persönliches Portfolio.

1. Berechnet die folgenden Zahlen auf zwei Dezimalstellen genau, eventuell mit einem Taschenrechner:

$$\sqrt{a+b},\ \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \sqrt{a-b},\ \sqrt{a}-\sqrt{b},\ \sqrt{a\cdot b},\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ und } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Entscheidet, welche der Zahlen $\sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ größer ist. Macht dasselbe für $\sqrt{a-b}$ und $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, danach für $\sqrt{a\cdot b}$ und $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, und dann für $\sqrt{\frac{a}{b}}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Wiederholt die Anforderungen für die Arbeitsaufgaben 1 und 2, wenn $a=\frac{225}{256}$ und $b=\frac{4}{25}$.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden,Anwendungstechniken

1. Zeigt, dass a eine Quadratzahl ist, und berechnet dann $\sqrt{a}$:

a. $a=25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17$; **b.** $a=12\cdot(1+2+3+...+24)$; **c.** $a=14^{60}$; **d.** $a=3^{24}\cdot7^{12}$.

Lösung:

a. $a=25\cdot13+25\cdot20-25\cdot17=25\cdot(13+20-17)=25\cdot16=5^2\cdot4^2=(5\cdot4)^2=20^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a}=\sqrt{20^2}=20$.

b. $a=12\cdot(1+2+3+...+24)=12\cdot\frac{24\cdot25}{2}=12\cdot\frac{24}{2}\cdot25=12\cdot12\cdot25=12^2\cdot5^2=(12\cdot5)^2=60^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a}=\sqrt{60^2}=60$.

c. $a=14^{60}=14^{30\cdot2}=(14^{30})^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a}=\sqrt{(14^{30})^2}=14^{30}$.

d. $a=3^{24}\cdot7^{12}=(3^{12})^2\cdot(7^6)^2=(3^{12}\cdot7^6)^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a}=\sqrt{(3^{12}\cdot7^6)^2}=3^{12}\cdot7^6$.

2. Berechnet:

a. $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}}$; **b.** $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3}$.

Lösung:

a. Wir berechnen zuerst die Quadratwurzeln, dann beachten wir die Reihenfolge der Operationen mit rationalen Zahlen: $\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}+\sqrt{100}:\sqrt{25}+\sqrt{25\cdot\sqrt{81}}=4\cdot3+10:5+\sqrt{25\cdot9}=12+2+\sqrt{5^2\cdot3^2}=14+\sqrt{15^2}=$ $=14+15=29$.

b. $\sqrt{4^2\cdot15+4^2\cdot5^2-4^3}=\sqrt{4^2\cdot(15+5^2-4)}=\sqrt{4^2\cdot36}=\sqrt{4^2\cdot6^2}=\sqrt{24^2}=24$.

Vorgeschlagene Aufgaben

1. Welche der folgenden Zahlen ist eine Quadratzahl?

a. 9; **b.** 24; **c.** 63; **d.** 81; **e.** 196; **f.** 144; **g.** 336; **h.** 400; **i.** 625.

2. Schreibt die Quadratzahlen zwischen 10 und 150.

3. Übertragt ins Heft und füllt dann die Tabelle aus:

x	3	7	9		15		23		
x^2		49		100		400		625	900

4. Entscheidet, ob die folgende Gleichungen wahr oder falsch sind:

a. $\sqrt{4}=2$; **b.** $\sqrt{5}=25$; **c.** $\sqrt{225}=15$; **d.** $\sqrt{100}=50$; **e.** $\sqrt{64}=4$; **f.** $\sqrt{144}=12$.

5. Berechnet:

a. $\sqrt{25}$; **b.** $\sqrt{81}$; **c.** $\sqrt{1}$; **d.** $\sqrt{400}$; **e.** $\sqrt{576}$; **f.** $\sqrt{900}$.

6. Berechnet:

a. $\sqrt{4}+\sqrt{36}$; **b.** $\sqrt{49}-\sqrt{9}$; **c.** $\sqrt{1}+\sqrt{0}+\sqrt{16}$; **d.** $\sqrt{100}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{25}:5$.

7. Berechnet, eventuell mit dem Taschenrechner:

a. $\sqrt{441}+\sqrt{961}$; **b.** $\sqrt{4096}-\sqrt{1225}$; **c.** $\sqrt{2209}+2\cdot\sqrt{1369}$; **d.** $(\sqrt{17424}-\sqrt{1024}):\sqrt{4}$.

8. Berechnet:

a. $\sqrt{3^2}$; **b.** $\sqrt{14^2}$; **c.** $\sqrt{45^2}$; **d.** $\sqrt{5^4}$; **e.** $\sqrt{8^6}$; **f.** $\sqrt{2^8}$; **g.** $\sqrt{3^{10}}$.

9. Berechnet:

a. $\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{3^2+4^2}$; **b.** $\sqrt{9^2+12^2}-\sqrt{3\cdot 12}$; **c.** $\sqrt{25^2-20^2}:3+2\cdot\sqrt{121}$.

10. Berechnet:

a. $(\sqrt{196}-\sqrt{169})\cdot\sqrt{100}+\sqrt{225}$; **b.** $(\sqrt{400}-\sqrt{144}):4+\sqrt{196}:7$;

c. $\sqrt{3+\sqrt{36}}+\sqrt{16-\sqrt{49}}$; **d.** $\sqrt{6\cdot\sqrt{36}}+\sqrt{9\cdot\sqrt{81}}-\sqrt{20\cdot\sqrt{25}}$.

11. Zeigt, dass a eine Quadratzahl ist, und berechnet dann $\sqrt{a}$:

a. $1+3+5+7+9+11$; **b.** $(1+2+3+\ldots+17):17$; **c.** $a=41\cdot(1+2+3+\ldots+81)$.

12. Führt aus:

a. $\sqrt{2^2\cdot 5+2^2\cdot 4}$; **b.** $\sqrt{3^2\cdot 15+3^2\cdot 14-3^2\cdot 4}$; **c.** $\sqrt{10^2\cdot 81+10^2\cdot 18+10^2}$;

d. $\sqrt{2^4\cdot 3^2+2^4\cdot 11+2^4\cdot 5}$; **e.** $\sqrt{5^4\cdot 20-5^4\cdot 16+5^5}$; **f.** $\sqrt{6^4\cdot 13+6^4\cdot 5^2-6^4\cdot 2}$.

13. Berechnet x anhand der folgenden Beziehungen:

a. $\dfrac{x}{\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}$; **b.** $\dfrac{\sqrt{25}}{x}=\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{144}}$; **c.** $\dfrac{2\cdot\sqrt{121}}{x}=\dfrac{\sqrt{49}-\sqrt{9}}{\sqrt{64}}$; **d.** $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{196}}}{x}=\dfrac{\sqrt{6^2+8^2}}{\sqrt{5+\sqrt{400}}}$.

14. Führt aus:

a. $\sqrt{3^2\cdot 6^2}$; **b.** $\sqrt{8^2\cdot 5^2\cdot 2^2}$; **c.** $\sqrt{3^4\cdot 5^4}$; **d.** $\sqrt{5^{20}\cdot 6^{20}}$; **e.** $\sqrt{2^8\cdot 3^{10}}$; **f.** $\sqrt{7^{16}\cdot 10^{28}}$.

15. Verwendet eventuell den Taschenrechner und berechnet:

a. $(\sqrt{15129}+\sqrt{2116}):\sqrt{169}-(\sqrt{13225}+\sqrt{841}):\sqrt{144}$;

b. $(3\cdot\sqrt{91809}+\sqrt{8281}):(\sqrt{32400}+2\cdot\sqrt{25600}):(\sqrt{168100}-\sqrt{166464})$.

16. Ordnet jeder Quadratwurzel in der ersten Zeile den entsprechenden Wert in der zweiten Zeile zu:

a. $\sqrt{\dfrac{64}{49}}$	**b.** $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$	**c.** $\sqrt{\dfrac{441}{169}}$	**d.** $\sqrt{\dfrac{529}{144}}$	**e.** $\sqrt{\dfrac{1024}{361}}$	**f.** $\sqrt{\dfrac{1}{676}}$

A. $\dfrac{23}{12}$	**B.** $\dfrac{8}{7}$	**C.** $\dfrac{21}{13}$	**D.** $\dfrac{32}{19}$	**E.** $\dfrac{3}{4}$	**F.** $\dfrac{1}{24}$	**G.** $\dfrac{1}{26}$	**H.** $\dfrac{7}{4}$

17. Berechnet:

a. $\sqrt{0{,}04}$; **b.** $\sqrt{0{,}36}$; **c.** $\sqrt{0{,}0001}$; **d.** $\sqrt{2{,}56}$; **e.** $\sqrt{1{,}44}$; **f.** $\sqrt{10{,}24}$.

18. Führt aus:

a. $\sqrt{144\cdot 36}$; **b.** $\sqrt{\dfrac{1{,}44}{25}}$; **c.** $\sqrt{4\cdot 0{,}36}$; **d.** $\sqrt{0{,}04\cdot 0{,}49}$; **e.** $\sqrt{\dfrac{1{,}69}{4}}$; **f.** $\sqrt{\dfrac{1}{2{,}56}}$.

Test

1. Berechnet:

a. $\sqrt{16}$; **b.** $\sqrt{3{,}24}$; **c.** $\sqrt{25}+\sqrt{49}-\sqrt{36}$; **d.** $\sqrt{6^2+8^2}:\sqrt{4\cdot 5^2}$. **(3 Pkte.)**

2. Wählt die richtige Antwort aus. Das Ergebnis der Rechnung

$$\sqrt{5\cdot\sqrt{144}+4\cdot\sqrt{400}+\sqrt{16}}:\sqrt{3^3-5^2+2}-\sqrt{8+\sqrt{49}+7\cdot\sqrt{9}}\ \text{ist:}$$

a. 0; **b.** 1; **c.** 2; **d.** 3. **(3 Pkte.)**

3. Berechnet $\sqrt{a}$, wobei:

a. $a=2^4\cdot 3^4\cdot 5^4$; **b.** $a=17\cdot(1+2+3+\ldots+17)$; **c.** $a=6^4\cdot 47+6^4\cdot 11+6^5$. **(3 Pkte.)**

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.
Arbeitszeit: 20 Minuten.

1.2

2. Lektion: Die Menge der reellen Zahlen

Schlüsselwörter

natürliche Zahl | irrationale Zahl | Zahlenachse | ganze Zahl | reelle Zahl | Absolutbetrag einer reellen Zahl | rationale Zahl | $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ | Gegenzahl (entgegengesetzte Zahl) einer reellen Zahl

Irrationale Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen

Problemstellung

Wie wir in Lektion 1 gesehen haben, hat das Quadrat in Abbildung 1 die Seitenlänge $\sqrt{2}$. Was für eine Zahl ist $\sqrt{2}$?

Mit einem Taschenrechner erhalten wir einen Näherungswert mit 8 Dezimalstellen:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135\ldots.$$

Der Bildschirm eines Taschenrechners kann bis zu 8 Stellen anzeigen. In diesem Fall könnt ihr eine Handy-App verwenden, um 15 Dezimalstellen zu erhalten:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414213562373095\ldots.$$

Mithilfe einer Computeranwendung, die als wissenschaftlicher Taschenrechner bezeichnet wird, finden wir:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots.$$

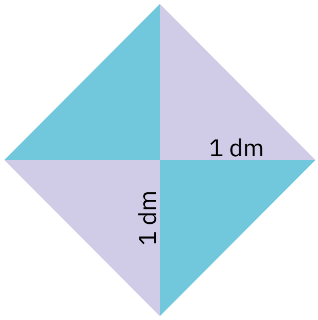


Abbildung 1

Die bisher erhaltenen Dezimalzahlen wiederholen sich nicht periodisch, und rationale Zahlen können als endliche oder periodische Dezimalbrüche geschrieben werden. Was für eine Zahl ist also $\sqrt{2}$?

Was stellen wir fest?

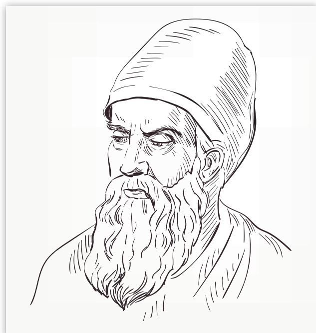
Die vorgenommenen Annäherungen zeigen, dass es *Zahlen gibt*, die als nichtperiodische Dezimalbrüche ausgedrückt werden (bei denen sich die Dezimalstellen nicht periodisch wiederholen). Mit anderen Worten, diese Zahlen sind weder endliche Dezimalbrüche noch periodische (einfache oder gemischte) Dezimalbrüche, sie sind also keine rationalen Zahlen.

Geschichte der Mathematik

Obwohl wir oben mit verschiedenen Methoden eine ausreichend große Anzahl von Dezimalstellen für die Zahl $\sqrt{2}$ ermittelt haben, haben wir nur eine *endliche* Anzahl von Dezimalstellen untersucht. Nur auf der Grundlage dieser Computerschätzungen können wir nicht entscheiden, ob $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist oder nicht.

In seinem Buch *Die Elemente* bewies Euklid (geb. ca. 325 v. Chr.), dass:

$\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.


Euklid

Wenn man mithilfe der Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch annimmt, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, gäbe es die von null verschiedenen, teilerfremden natürlichen Zahlen (relative Primzahlen) p und q, sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, oder, äquivalent, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Daraus folgt, dass $p^2 = 2q^2$, also p durch 2 teilbar ist. Wenn $p = 2s$, dann ist $4s^2 = 2q^2$, d. h., $q^2 = 2s^2$, also ist auch q durch 2 teilbar. Wir erhalten, dass die Zahlen p und q den gemeinsamen Teiler 2 haben, was im Widerspruch zu der Tatsache steht, dass p und q teilerfremd sind. Diese Annahme ist falsch, sodass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Da es sich also nicht um eine rationale Zahl handelt, wird $\sqrt{2}$ als unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch geschrieben.

Merke dir!

Zahlen, die als unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche geschrieben werden können, werden als irrationale Zahlen bezeichnet. Also sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ irrationale Zahlen.

Allgemeiner ausgedrückt: Wenn die natürliche Zahl n keine Quadratzahl ist, dann ist $\sqrt{n}$ irrational.

Wenn x eine positive irrationale Zahl ist, dann ist $\sqrt{x}$ irrational. Folglich können wir über die Wurzel aus einer positiven reellen Zahl sprechen.

Beispiele

1. Das Verhältnis zwischen der Länge des Kreises und seinem Durchmesser ist eine irrationale Zahl, die mit dem griechischen Buchstaben π (*pi*) bezeichnet wird. Der ungefähre Wert ist $\pi = 3{,}1415926535\ldots$.

2. Der Goldene Schnitt, der mit dem griechischen Buchstaben φ (*phi*) bezeichnet wird, ist die erste irrationale Zahl, die in der Geschichte der Mathematik entdeckt und definiert wurde. Der ungefähre Wert ist 1,6180339887… . Der Goldene Schnitt wurde von Euklid entdeckt. Er teilte eine Strecke in zwei Teile, die er als „Mittelwert“ und „extremes Verhältnis“ bezeichnete, sodass das Verhältnis φ zwischen der Länge der ursprünglichen Strecke und der Länge der längeren Strecke gleich dem Verhältnis der Länge der längeren Strecke zur Länge der kürzeren Strecke ist:

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Gegenwärtige Studien zeigen, dass die goldene Zahl in den Proportionen des menschlichen Körpers, bei vielen Tieren und Pflanzen, in der Struktur der DNA und im Aufbau des Sonnensystems, in der Kunst (Malerei, Musik, Bildhauerei) und Architektur, aber auch in den Wachstumsraten der Bevölkerung und an der Börse auftaucht.

3. Die Zahl $A = 1{,}01001000100001000001 0\ldots$, bei der sich die Anzahl der 0-Stellen nach jeder 1 um eins erhöht, ist eine irrationale Zahl.

Wäre A ein periodischer Dezimalbruch mit einer Periode von n Ziffern, so müsste unter den n Ziffern zwangsläufig die Ziffer 1 sein, da die Periode nicht nur die Ziffer 0 enthalten kann. Folglich müsste sich unter den n Dezimalstellen von A mindestens eine 1 befinden. Aber unmittelbar nach der n-ten Ziffer 1 von A folgt n + 1-mal die Ziffer 0, also ist A irrational.

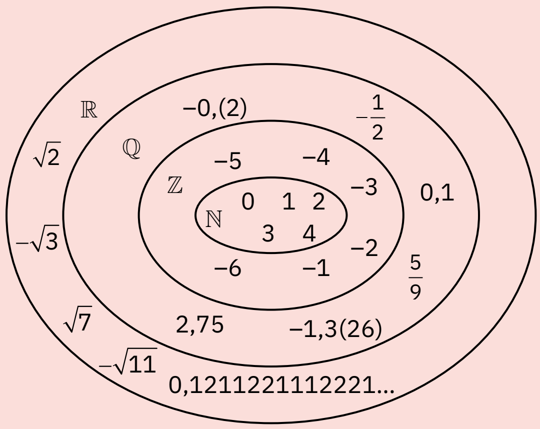
Merke dir!

Die Menge der reellen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{R}$, ist die Vereinigung der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen.

Da die Menge der reellen Zahlen die Menge der rationalen Zahlen enthält, ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Daraus ergibt sich die Folge der Einschlüsse $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Daraus folgt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.



Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlenachse

Mathe im Alltag

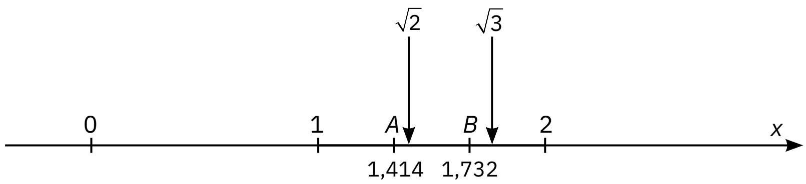
Wir wollen zwei Quadrate aus Papier mit einem Flächeinhalt von 2 cm^2 bzw. 3 cm^2 anfertigen.

Die Seiten der beiden Quadrate haben eine Länge von $\sqrt{2}$ cm bzw. $\sqrt{3}$ cm, also müssen wir Strecken mit diesen Abmessungen konstruieren.

Wir betrachten zuerst ihre Näherungenswerte: $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$.

Wir tragen diese Näherungswerte auf der Zahlenachse ein, wobei wir die Maßeinheit auf 1 cm setzen, und erhalten auf der Achse die Punkte A und B (Abbildung 2). Die Strecken OA und OB haben eine Länge von etwa $\sqrt{2}$ cm bzw. $\sqrt{3}$ cm.

Abbildung 2



Was stellen wir fest?

Eine irrationale Zahl wird durch einen Punkt auf der Zahlenachse dargestellt. Die Lage dieses Punktes kann mithilfe einer hinreichend genauen rationalen Näherung der irrationalen Zahl geschätzt werden.

1.2

Merke dir!

Eine Gerade, auf der ein Punkt liegt, der als *Ursprung* bezeichnet wird, eine von links nach rechts verlaufende Richtung, die durch einen Pfeil angezeigt wird und *als positiver Richtungssinn* bezeichnet wird, und eine Strecke, die als *Maßeinheit* angenommen wird, wird *Zahlenachse* genannt. Die *Ox-Achse* hat ihren Ursprung im Punkt *O*, und der positive Richtungssinn ihrer Punkte verläuft von *O* nach *x*.

Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlenachse. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Zahlenachse einer einzigen reellen Zahl, die als *Koordinate* oder *Abszisse* des Punktes bezeichnet wird. Der Ursprung der Achse hat die Koordinate 0 (Null). Die Abszisse des Punktes *A* auf der Zahlenachse wird mit x_A bezeichnet. Wir schreiben dies wie folgt: $A(x_A)$.

Intuitiv besetzen die reellen Zahlen alle Punkte auf der Achse. Da verschiedene reelle Zahlen verschiedenen Punkten auf der Zahlenachse entsprechen, können wir jeden Punkt auf der Achse mit einer reellen Zahl identifizieren.

Bemerkungen

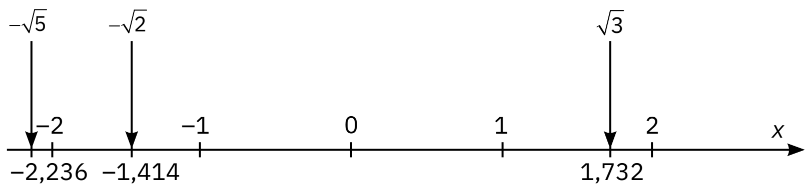
1. Reelle Zahlen, die rechts vom Ursprung dargestellt werden, nennt man positive reelle Zahlen. In ihrer Dezimalschreibweise wird das Zeichen „+" vor die erste Ziffer geschrieben.
   Wie bei den rationalen Zahlen kann auch bei den positiven Zahlen das Vorzeichen weggelassen werden.
   Die positiven reellen Zahlen werden mit $\mathbb{R}_+$ bezeichnet.
   Beispiele für positive reelle Zahlen: $+3 = 3$; $+\sqrt{6} = \sqrt{6}$; $+7,(51) = 7,(51)$ usw.
2. Die reellen Zahlen links vom Ursprung werden als negative reelle Zahlen bezeichnet. In ihrer Dezimalschreibweise wird das Zeichen „–" vor die erste Ziffer geschrieben.
   Die Menge der negativen reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}_-$ bezeichnet.
   Beispiele für negative reelle Zahlen: -2; $-\sqrt{11}$; $-7,1$; $-1,(3)$ usw.
3. Die reelle Zahl 0 hat kein Vorzeichen (sie ist weder positiv noch negativ).
   Die Menge der reellen Zahlen, die nicht Null sind, wird mit $\mathbb{R}^*$ bezeichnet.
   Wir haben $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.
4. Da irrationale Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ausgedrückt werden, gelten für ihre Abrundungen oder Aufrundungen sowie für das Runden auf eine bestimmte Zifferordnung die gleichen Regeln wie für rationale Zahlen.
   Zum Beispiel ist die Abrundung und Aufrundung von $\sqrt{2}$ auf Hundertstel genau 1,41 bzw. 1,42, und die Rundung (Approximation) von $\sqrt{7} = 2,6457\ldots$ auf Tausendstel genau 2,646.

Beispiele

Abbildung 3 zeigt die folgenden reellen Zahlen unter Verwendung von Dezimalapproximationen (Dezimalnäherungswerte):

a. $-\sqrt{2} = -1,414\ldots$; **b.** $\sqrt{3} = 1,732\ldots$; **c.** $-\sqrt{5} = -2,236\ldots$.

Abbildung 3



Mathe im Alltag

Stellt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 1 cm dar.

Mithilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich, dass die Hypotenuse den Wert von $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm hat.

Zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete der Länge $\sqrt{2}$ cm, die mit der Hypotenuse des vorherigen Dreiecks zusammenfällt, und mit der Länge der anderen Kathete 1 cm, wie in Abbildung 4. Mithilfe des Satzes von Pythagoras wird abgeleitet, dass die Hypotenuse des zweiten Dreiecks die Länge $\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ hat.

Führt das Verfahren fort und konstruiert Strecken mit einer Länge von $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, und $\sqrt{7}$ cm.

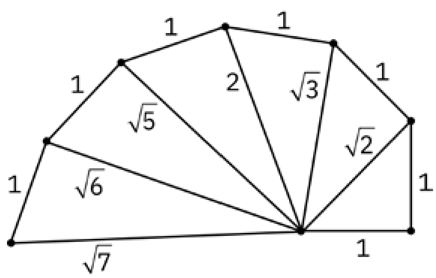


Abbildung 4

Was stellen wir fest?

Mithilfe des Geodreiecks und des Zirkels können wir für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Strecke der Länge $\sqrt{n}$ cm darstellen. Mithilfe des Zirkels und dieser Strecke können wir die reelle Zahl $\sqrt{n}$ genau auf der Achse einzeichnen.

Wusstet ihr das?

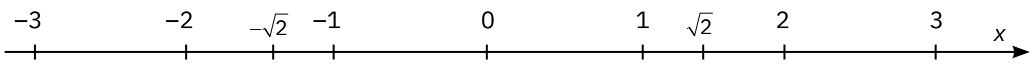
Die oben abgebildete Spirale wurde im 5. Jahrhundert v. Chr. von dem Mathematiker Theodoros von Kyrene entdeckt. Sie wird *Spirale von Theodoros* oder *Schnecke des Pythagoras* genannt. Theodoros blieb bei der Darstellung von $\sqrt{17}$ stehen, weil er glaubte, dass sich für $n \geq 18$ die Hypotenusen der Dreiecke mit den bereits dargestellten Strecken überschneiden.

Im Jahr 1958 bewies der Mathematiker Erich Teuffel, dass sich die Hypotenusen der Spirale nicht überschneiden, egal wie lang man Theodoros' Verfahren fortsetzt.

Der Absolutbetrag (Betrag) einer reellen Zahl

Problemstellung

In Abbildung 5 sind die Punkte, die den Zahlen -3, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ und 3 entsprechen, auf einer Achse aufgetragen.

Abbildung 5


Die Punkte, die den entgegengesetzten Zahlen -3 und 3 entsprechen, haben den gleichen Abstand vom Ursprung. Die Punkte, die den Zahlen $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ entsprechen, haben ebenfalls den gleichen Abstand vom Ursprung. Wir schließen daraus, dass die Zahlen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ ebenfalls entgegengesetzt (Gegenzahlen) sind.

Was stellen wir fest?

Jede reelle Zahl hat eine entgegengesetzte Zahl. Die entgegengesetzten reellen Zahlen befinden sich auf der Zahlenachse im gleichen Abstand vom Ursprung, auf beiden Seiten davon.

Merke dir!

Zwei reelle Zahlen, die nicht null sind, werden als *entgegengesetzt* bezeichnet, wenn ihnen auf der Zahlenachse zwei Punkte entsprechen, die gleich weit vom Ursprung entfernt sind.

Wenn x eine reelle Zahl ist, wird $-x$ als die entgegengesetzte Zahl von x bezeichnet. Die entgegengesetzte Zahl der reellen Zahl 0 ist 0.

Beispiele

1. Die Gegenzahl von 6 ist -6.
2. Die Gegenzahl von $-1,(5)$ ist $1,(5)$.
3. Die Gegenzahl von $\sqrt{3}$ ist $-\sqrt{3}$.
4. Die Gegenzahl von 3,5055055505... ist −3,5055055505... .

Merke dir!

Der Absolutbetrag einer reellen Zahl x ist der Abstand zwischen dem Ursprung und dem Punkt, der der Zahl x auf der Zahlenachse entspricht.

Der Absolutbetrag der reellen Zahl x, auch *Absolutwert*, *Betrag* oder *Modul* von x genannt, wird mit $|x|$ bezeichnet.

Bemerkungen

1. Aus der Interpretation des Absolutbetrags als Abstand (Abbildung 6) folgt, dass der Absolutbetrag einer positiven reellen Zahl die Zahl selbst ist und der Absolutbetrag einer negativen reellen Zahl gleich der ihr entgegengesetzten Zahl ist.

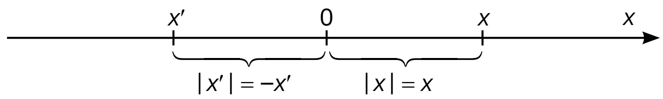


Abbildung 6

Das heißt, wir haben: $|x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x > 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$.

2. Die Absolutbeträge zweier entgegengesetzter Zahlen sind gleich: $|-x| = |x|$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
Ein Beispiel ist in Abbildung 7 zu sehen.

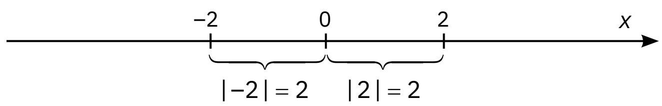


Abbildung 7